II. BASHKËSITË

1. BASHKËSITË. KUPTIMET ELEMENTARE

Bashkësia është kuptim elementar në matematikë.

Tek kuptimi i bashkësisë, është me rëndësi të dijmë elementet (anëtarët) që përmban ajo.

Bashkësitë do t'i shënojmë me shkronjat $A, B, C, D, ...$
Elementet e bashkësive do t'i shënojmë me shkronjat $a, b, c, d, ...$

Nëse elementi *a* i takon bashkësisë *A*, simbolikisht shënohet $a \in A$ (*lexohet*: *a* element i *A* – së).

Nëse elementi *a* nuk i takon bashkësisë *A*, simbolikisht shënohet $a \notin A$ (*lexohet*: *a* nuk është element i *A* – së).

Zakonisht bashkësitë i përshkruajmë me njërën nga mënyrat vijuese:

1) Duke përshkruar elementet, p.sh. bashkësia $\{a, b, c, d\}$ përbëhet vetëm nga elementet a, b, c, d.
2) Duke përshkruar vetitë e elementeve me anë të ndonjë shprehje $p(x)$. P.sh. nëse dëshirojmë të paraqesim bashkësinë e numrave njëshifror natyrorë kemi $A = \{x \mid 1 \le x < 10,\ x \in N\}$.

Bashkësia të cilës i takojnë të gjitha elementet, përfshirë edhe vetveten quhet *bashkësi universale*. Simbolikisht shënohet $\bigcup$.

Bashkësia që nuk ka asnjë element quhet *bashkësi boshe.* Simbolikisht shënohet me $\varnothing$.

Disa nga bashkësitë numerike:

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ - *bashkësia e numrave natyrorë*

$Z = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ - *bashkësia e numrave të plotë*

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \ne 0 \right\}$ - *bashkësia e numrave racionalë*

$I = \{x \mid x$ nuk mund të shkruhet si thyesë$\}$- *bashkësia e numrave iracionalë*

$R = Q \cup I$ - *bashkësia e numrave realë*

Shembulli 1. Të paraqiten elementet e bashkësive

a) $A = \{x \mid x \in N,\ 3 < x < 12\}$,

b) $B = \{x \mid x \in N,\ x - \text{çift},\ x < 15\}$,

c) $C = \{x \mid x \in N,\ x + 4 = 3\}$.

Zgjidhja.

a) $A=\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

b) $B=\{2,4,6,8,10,12,14\}$.

c) Meqë zgjidhja e barazimit $x+4=3$ është $x=-1\notin N$ përfundojmë se bashkësia C nuk përmban asnjë element. D.m.th. $C=\emptyset$.

Shembulli 2. Janë dhënë bashkësitë

$$X=\{4,2\},\ Y=\{x\mid x^2-6x+8=0\},$$

$$Z=\{x\mid x\in N, x\text{–çift},\ 1<x<5\}.$$

Cila prej tyre është e barabartë me $B=\{2,4\}$?

Zgjidhja.

Për të caktuar elementet e bashkësisë Y zgjidhim barazimin kuadratik $x^2-6x+8=0$. Pas zgjidhjes merret $x_1=2, x_2=4$. Pra $Y=\{2,4\}$.

Është e qartë se $Z=\{2,4\}$.

Pra, që të tri bashkësitë X,Y,Z janë të barabarta me bashkësinë $\{2,4\}$.

Shembulli 3. Janë dhënë bashkësitë:

$$X=\{x\mid x^2=9\wedge 2x=4\},\ Y=\{x\mid x\neq x\},$$

$$Z=\{x\mid x\in Z,\ x+8=8\}.$$ Cila prej tyre është boshe?

Zgjidhja.

Lexuesi le të arsyetojë se bashkësitë X dhe Y janë boshe.

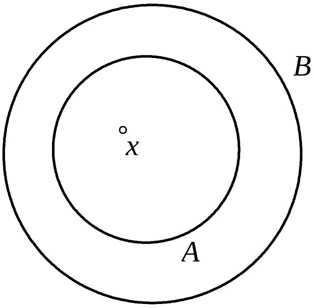
Përkufizimi* 1. (**NËNBASHKËSIA**).** Bashkësia A është ***nënbashkësi e bashkësisë B, nëse çdo element i bashkësisë A njëkohësisht i takon edhe bashkësisë B. Simbolikisht shënojmë $A\subseteq B$.

Pra, $A\subseteq B \Leftrightarrow x\in A \Rightarrow x\in B$.

Nëse A nuk është nënbashkësi e bashkësisë B simbolikisht shënojmë $A\not\subseteq B$.

P.sh. nëse $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,3,4,5\}$ atëherë $A\subseteq B, A\not\subseteq C$.

Në figurën vijuese, me anë të *diagramit të Venit* janë paraqitur bashkësitë A,B ku $A\subseteq B$.



Është e qartë se për çdo bashkësi A vlejnë: $A \subseteq A$ dhe $\varnothing \subseteq A$.

Le të sqarojmë pohimin:

$$\varnothing \subseteq A \text{ për çdo bashkësia } A,$$

që nëse e shprehim me fjalë do të thotë:

"*Çdo element i bashkësisë* $\varnothing$ *i takon bashkësisë* A".

Është e qartë se një bashkësi, le të themi X nuk është nënbashkësi e një bashkësie tjetër Y, nëse në bashkësinë X gjendet një element që nuk gjendet në bashkësinë Y. për shembull, bashkësia $\{1,3,5,7\}$ nuk është nënbashkësi e bashkësisë $\{1,2,3,4,5,6\}$, sepse 7 është në bashkësinë e parë por nuk është në bashkësinë e dytë. Kështu pohimi $\varnothing \subseteq A$ do të ishte i pasaktë nëse e gjejmë një element në bashkësinë $\varnothing$ i cili nuk është në bashkësinë A. Por, një element të tillë nuk mund ta gjejmë sepse bashkësia $\varnothing$ nuk ka asnjë element.

Konkludojmë se vlen $\varnothing \subseteq A$, pçdo bashkësi A.

Përkufizimi 2. **(**BARAZIA E BASHKËSIVE**)**. Nëse $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq A$, atëherë themi se bashkësitë janë të ***barabarta***.

Simbolikisht shënojmë $A = B$. Pra, bashkësitë A, B përmbajnë të njëjtat elemente.

Përkufizimi 3. **(**NËNBASHKËSIA E MIRËFILLTË**)**. Nëse $A \subseteq B$ dhe $A \neq B$ atëherë themi se A është ***nënbashkësi e mirëfilltë*** e bashkësisë B. Simbolikisht shënojmë $A \subset B$.

***Shembulli* 4.** Janë dhënë bashkësitë

$$A = \{x \mid x \in Z, x > 1\},$$

$$B = \{y \mid y \in N, y \text{ plotpjesëtohet me } 2\},$$

$$C = \{z \mid z \text{ është numër çift më i madh se } 10\}.$$

Cila prej tyre është nënbashkësi e bashkësisë $W=\{2,4,6,8,...\}$?

A është ndonjëra nënbashkësi e mirëfilltë e bashkësisë W?

Zgjidhja.

Vërejmë se:

$A=\{2,3,4,5,...\}$, $B=\{2,4,6,8,...\}$, $C=\{12,14,16,18,...\}$.

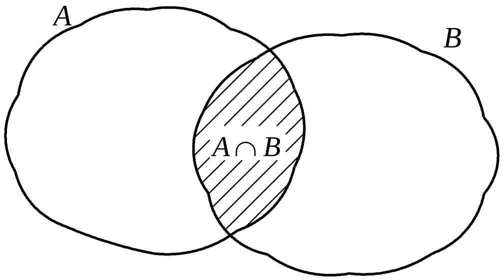
Tani është e qartë se bashkësitë B,C janë nënbashkësi të bashkësisë W. Bashkësia C është nënbashkësi e mirëfilltë e bashkësisë W. Mund të shkruajmë $B\subseteq W, C\subset W$.

2. VEPRIMET ME BASHKËSI

Përkufizimi 1. (PRERJA-$\cap$) ***Prerja e bashkësive*** A,B është bashkësia e elementeve të përbashkëta të tyre. Pra,

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}.$$

Në figurën vijuese është paraqitur *diagrami i Venit* për prerjen e bashkësive.



Kështu nëse $A=\{4,5,6,7,8,9,10,11\}, B=\{2,4,6,8,10,12,14\}$, atëherë

$A\cap B=\{4,6,8,10\}$.

Në përgjithësi, prerja e ndonjë familje të bashkësive, është bashkësia e elementeve që i takojnë secilës prej bashkësive të asaj familje.
Pra

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{x \mid x\in A_i, \forall i\in I\}.$$

Shënimi 1. I paraqet bashkësi indeksash.

Për shembull, nëse:

$A_1=\{1,2,3,4,5\}, A_2=\{2,3,4,5,6\}, A_3=\{3,4,5,6,7\}, A_4=\{4,5,6,7,8\},$

$A_5=\{5,6,7,8,9\}$ atëherë

$$\bigcap_{i=1}^{5} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{5\}.$$

Bashkësitë A, B quhen ***disjunkte*** nëse $A \cap B = \emptyset$.

P.sh. nëse $A = \{x \in N \mid x - \text{numër çift}\}$, $B = \{x \in N \mid x - \text{numër tek}\}$, atëherë $A \cap B = \emptyset$.

Në rastin e përgjithshëm, bashkësitë $A_i, i \in I$ janë disjunkte nëse $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$.

P.sh. nëse $A_1 = \{1,2,3,4\}, A_2 = \{2,3,4,5\}, A_3 = \{3,4,5,6\}, A_4 = \{4,5,6,7\}$ atëherë

$$\bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset.$$

Bashkësitë në një familje bashkësish themi se janë në ***dyshe disjunkte*** (ose ***reciprokisht disjunkte***) nëse çdo dyshe e bashkësive në atë familje është disjunkte.

Le të jenë:

$$A_1 = \{x \in N \mid x = 4k, k \in N\}$$

$$A_2 = \{x \in N \mid x = 4k+1, k \in N\}$$

$$A_3 = \{x \in N \mid x = 4k+2, k \in N\}$$

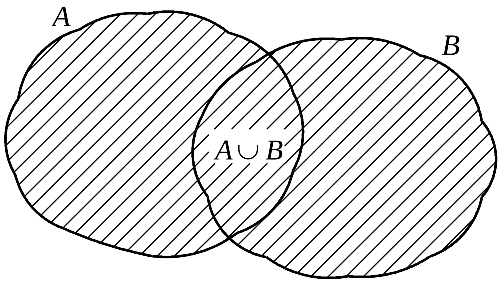
$$A_4 = \{x \in N \mid x = 4k+3, k \in N\}.$$

Bashkësitë A_1, A_2, A_3, A_4 janë në dyshe disjunkte sepse $A_i \cap A_j = \emptyset$, për $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4\}$.

Përkufizimi 2. (**UNIONI-**$\cup$) ***Unioni i bashkësive*** A, B është bashkësia e elementeve që i takojnë së paku njërës prej bashkësive të dhëna. Pra,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Në figurën vijuese është paraqitur *diagrami i Venit* për prerjen e bashkësive.



Kështu nëse $A=\{4,5,6,7,8,9,10,11\}, B=\{2,4,6,8,10,12,14\}$, atëherë $A\cup B=\{2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14\}$.

Në përgjithësi, unioni i ndonjë familje të bashkësive, është bashkësia e elementeve që i takojnë së paku njërës prej bashkësive të asaj familje.

Pra

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid x\in A_i, \text{ per ndonje } i\in I\}$$

ose

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i\in I,\ x\in A_i\}.$$

Zbërthim (***copëtim, ndarje, particion***) i bashkësisë S është familja $\mathcal{F}$ e nënbashkësive joboshe për të cilat:

1) Çdo dy elemente (bashkësi) nga $\mathcal{F}$ janë disjunkte, pra

$$(\forall F_i, F_j \in \mathcal{F},\ i\neq j, F_i\cap F_j=\varnothing).$$

2) Unioni i elementeve (bashkësive) nga $\mathcal{F}$ është bashkësia S, pra

$$\bigcup F_i = S, F_i\in\mathcal{F}.$$

Për shembull:

i) Çdo bashkësi njëelementëshe $\{x\}$ ka saktësisht një zbërthim, dhe atë $\{\{x\}\}$.

ii) Për çdo bashkësi S, bashkësia $P=\{X\}$ është zbërthim i bashkësisë S.

iii) Nëse A është nënbashkësi e mirëfilltë joboshe e bashkësisë S, atëhere familja $\{A,\overline{A}\}$ paraqet zbërthim të bashkësisë S.

iv) Bashkësia $\{1,2,3\}$ ka këto zbërthime:

- $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$
- $\{\{1,2\},\{3\}\}$
- $\{\{1,3\},\{2\}\}$
- $\{\{1\},\{2,3\}\}$
- $\{\{1,2,3\}\}$

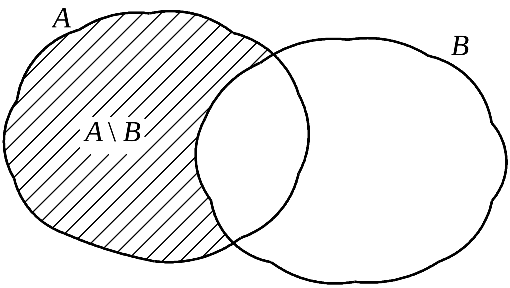
Vërejmë se familja e bashkësive $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ nuk është zbërthim për asnjë bashkësi sepse elementi 2 i takon dy elementeve (bashkësive) të familjes.

Po ashtu, vërejmë se $\{\{1\},\{2\}\}$ nuk është zbërthim i bashkësisë $\{1,2,3\}$ sepse asnjëri element nuk e përmban numrin 3. megjithatë familja $\{\{1\},\{2\}\}$ është zbërthim i $\{1,2\}$.

Përkufizimi 3. (**NDRYSHIMI, DIFERENCA-**$\setminus$) ***Ndryshimi i bashkësive*** A, B është bashkësia e që përmban elementet që i takojnë bashkësisë A por jo bashkësisë B. Pra,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge \ x \notin B\}.$$

Në figurën vijuese është paraqitur *diagrami i Venit* për ndryshimin e bashkësive $A \setminus B$..



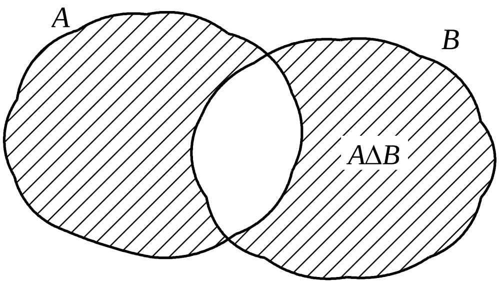
Kështu nëse $A = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}, B = \{2,4,6,8,10,12,14\},$ atëherë

$A \setminus B = \{5,7,9,11\}$.

Përkufizimi 4. (**NDRYSHIMI SIMETRIK-**Δ) ***Ndryshimi simetrik i bashkësive*** A, B është bashkësia e definuar si vijon

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Në figurën vijuese është paraqitur *diagrami i Venit* për ndryshimin simetrik të bashkësive A, B.

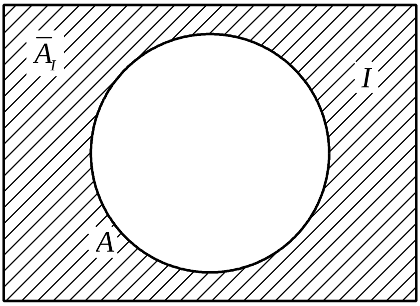


Kështu nëse $A = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}, B = \{2,4,6,8,10,12,14\},$ atëherë

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{5,7,9,11\} \setminus \{2,12,14\} = \{5,7,9,11\}$.

Përkufizimi 5. (**KOMPLEMENTI**) Nëse A është nënbashkësi e bashkësisë I, atëherë ***komplementi i bashkësisë*** A në lidhje me I është bashkësia e elementeve që i takojnë bashkësisë I por jo bashkësisë A. Pra $\overline{A}_I = \{x \mid x \in I \wedge x \notin A\}$.

D.m.th. $\overline{A}_I = I \setminus A$.[1]



P.sh. Nëse $I = \{1, 2, 3, ..., 10\}, A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ atëhere $\overline{A}_I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Shembulli 1. Është dhënë bashkësia $S = \{0, 1, 2, ..., 10\}$.

a) Të caktohen bashkësitë

$$A = \left\{ x \mid x \in S \wedge \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{4} \right) \in S \right\}, B = \left\{ y \mid y \in S \wedge \left(y - \frac{y}{3} \right) \in S \right\}.$$

b) Të caktohen: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B, \overline{A}_S$.

Zgjidhja.

a) Duhet të caktojmë të gjithë numrat x nga bashkësia S për të cilët $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} \in S$. Meqë $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = \frac{x}{4}$ mjafton të caktojmë numrat $x \in S$ për të cilët $\frac{x}{4} \in S$. Numrat e tillë janë numrat e bashkësisë S që plotpjesëtohen me 4, pra $A = \{0, 4, 8\}$. Ngjashëm veprojmë me bashkësinë B. Merret $b = \{0.3.6.9\}$.

b) $A \cup B = \{0, 3, 4, 6, 8, 9\}, A \cap B = \{0\}, A \setminus B = \{4, 8\}, B \setminus A = \{3, 6, 9\}$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{3, 4, 6, 8, 9\}$, $\overline{A}_S = S \setminus A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

Shembulli 2. Le të jetë Z bashkësia e numrave të plotë. Le të shënojmë me Z_C, Z_T bashkësitë e numrave të plotë çift dhe tek, përkatësisht. Të caktohet: $Z_C \cup Z_T, Z_C \cap Z_T, Z_C \setminus Z_T, Z_T \setminus Z_C, Z_C \Delta Z_T, \overline{(Z_T)}_Z, \overline{(Z_C)}_Z$.

[1] Komplementi i bashkësisë A ndonjëherë shënohet me A'.

Zgjidhja.

Lexuesi le të vërejë se:

$$Z_C \cup Z_T = Z, Z_C \cap Z_T = \varnothing, Z_C \setminus Z_T = Z_C, Z_T \setminus Z_C = Z_T,$$

$$Z_C \Delta Z_T = (Z_C \setminus Z_T) \cup (Z_T \setminus Z_C) = Z,\ \overline{(Z_T)}_Z = Z - Z_T = Z_C,\ \overline{(Z_C)}_Z = Z \setminus Z_C = Z_T.$$

Shembulli 3. Të vërtetohet se $A \setminus B = A \cap \overline{B}.$

Zgjidhja.

Duhet të tregojmë se $x \in A \setminus B$ atëherë dhe vetëm atëherë nëse $x \in A \cap \overline{B}.$ Vërtetë

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}.$$

Përkufizimi6.(**BASHKËSIA PARTITIVE**) Bashkësia e të gjitha nënbashkësive të bashkësisë A quhet ***bashkësi partitive*** dhe shënohet me $P(A)$. Pra, $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$

Meqë $\varnothing \subseteq A$ dhe $A \subseteq A$ atëherë $\varnothing \subseteq P(A), A \subseteq P(A).$

Shembulli 4. Le të jetë $A = \{1,2,3\}$. Të caktohet $P(A)$.

Zgjidhja.

Në bazë të përkufizimi, caktojmë të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë A.

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Vërejmë se $P(A)$ ka 8 elemente.

Në përgjithësi, nëse bashkësia A ka n elemente atëherë $P(A)$ ka 2^n elemente. Faktin se bashkësia A ka k elemente e shënojmë $n(A) = k.$

Shembulli 5. Le të jenë A, B bashkësi të fundme disjunkte. Tregoni se $A \cup B$ është e fundme dhe vlen $n(A \cup B) = n(A) + n(B).$

Zgjidhja.

Le të jenë $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\} \mid A \cap B = \varnothing.$

Atëherë $A \cup B = \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m\}$. Pra $n(A \cup B) = n + m = n(A) + n(B).$

3. LIGJET E ALGJEBRËS SË BASHKËSIVE

Ligjet e algjebrës së bashkësive do t'i paraqesim në tabelën vijuese:

	emërtimi	***rregulla***
1	*Ligjet komutative*	$A\cap B=B\cap A,\ \ A\cup B=B\cup A$
2	*Ligjet asociative*	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
3	*Ligjet distributive*	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
4	*Ligjet e De Morganit*	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\ \ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
5	*Ligjet e komplementit*	$A\cap\overline{A}=\varnothing,\ \ A\cup\overline{A}=U$
6	*Ligji i komplementit të dyfishtë*	$\overline{\overline{A}}=A$
7	*Ligjet idempotente*	$A\cap A=A,\ \ A\cup A=A,$
8	*Ligjet e absorbimit*	$A\cap(A\cup B)=A,\ \ A\cup(A\cap B)=A$
9	*Ligjet e dominimit*	$A\cap\varnothing=\varnothing,\ \ A\cup U=U$
10	*Ligjet e identitetit*	$A\cup\varnothing=A,\ \ A\cap U=A.$

Shembulli 1. Duke zbatuar ligjet e algjebrës së bashkësive të vërtetohen identitetet:

a) $(U\cap A)\cup(B\cap A)=A;$

b) $(\varnothing\cup A)\cap(B\cup A)=A;$

c) $(B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A);$

d) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A;$

e) $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A;$

f) $(\overline{B}\cap U)\cap(\overline{A}\cup\varnothing)=\overline{A\cup B};$

g) $(\overline{B}\cup\varnothing)\cup(\overline{A}\cup U)=\overline{A\cap B}.$

Zgjidhja.

Le të vërtetojmë p.sh. pohimin *e*.

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=((A\cap B)\cup A)\cap((A\cap B)\cup\overline{B})$$

$$=(A\cup(A\cap B))\cap(\overline{B}\cup(A\cap B))$$

$$=((A\cup A)\cap(A\cup B))\cap((\overline{B}\cup A)\cap(\overline{B}\cup B))$$

$$= (A \cap (A \cup B)) \cap ((A \cup \overline{B}) \cup \bigcup)$$

$$= A \cap (A \cup \overline{B}) = A\,.$$

Ngjashëm vërtetohen rastet e tjera.

Shembulli 2. Le të jetë E është bashkësi e çfarëdoshme, kurse $\{A_i\}_{i\in I}$ familje e bashkësive. Të vërtetohet se vlejnë pohimet:

$a)$ $E \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(E \cap A_i)$;

$b)$ $E \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(E \cup A_i)$.

Zgjidhja.

$a)$ $x \in E \cap \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \in E \wedge x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

$\Leftrightarrow x \in E \wedge x \in A_i$, për ndonjë $i \in I$

$\Leftrightarrow x \in E \cap A_i$, për ndonjë $i \in I$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(E \cap A_i)$.

$b)$ Ngjashëm.

Shembulli 3. Të vërtetohet se vlejnë pohimet:

$a)$ $E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i)$

$b)$ $E \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(E \setminus A_i)$

ku E është bashkësi e çfarëdoshme, kurse $\{A_i\}_{i\in I}$ familje e bashkësive.

Zgjidhja.

$a)$ $x \in E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$

$\Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin A_i$, për çdo $i \in I$

$\Leftrightarrow x \in E \setminus A_i$, për çdo $i \in I$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i)$.

Pra $E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i)$.

$b)$ Ngjashëm.

4. PRODHIMI KARTEZIAN

Përkufizimi 1. ***Prodhimi kartezian*** $A\times B$ i bashkësive A dhe B është bashkësia e të gjitha dysheve të renditura (a,b) ashtu që elementi i parë i takon bashkësisë A kurse elementi i dytë i takon bashkësisë së B.

Pra $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$.

Në përgjithësi prodhimi kartezian i bashkësive $A_1, A_2, ..., A_n$ është bashkësia e $n-$sheve të renditura, ashtu që elementi i $i-$të i takon bashkësisë A_i. Pra

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times ...\times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)\mid \forall i, a_i\in A_i\}.$$

Nëse $A_1 = A_2 = ... = A_n$ atëherë kemi $A\times A\times ...\times A_n = A^n$.

Shembulli 1. Janë dhënë bashkësitë $A=\{1,2,3\}, B=\{b,c\}$.

a) Të njehsohet $A\times B, B\times A, A\times A, B\times B$.

b) A mund të përfundojmë se $A\times B = B\times A$?

c) A mund të përfundojmë se $n(A\times B) = n(B\times A)$?

Zgjidhja.

$a)$ $A\times A=\{(1,b),(1,c),(2,b),(2,c),(3,b),(3,c)\}$

$B\times A=\{(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$B\times B=\{(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$.

$b)$ Arsyetoni pse $A\times B\neq B\times A$.

$c)$ Arsyetoni pse $n(A\times B) = n(B\times A)$.

Shembulli 2. Janë dhënë bashkësitë $A=\{a,b,c\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}, C=\{1,2\}$.

a) Të njehsohet $(A\times B)\times C, A\times(B\times C)$.

b) Të njehsohet A^3, C^2.

c) A vlen $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$?

Zgjidhja.

$a)$ I lihet lexuesit.

b) I lihet lexuesit.

c) Në bazë të rastit a) përfundojmë se $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$.

Shembulli 3. Të vërtetohet se për bashkësitë e çfarëdoshme A,B,C vlen
$$(A\times B)\cap(A\times C) = A\times(B\cap C).$$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}(A\times B)\cap(A\times C) &= \{(x,y)\mid (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in A\times C\}\\ &= \{(x,y)\mid x\in A, y\in B \wedge x\in A, y\in C\}\\ &= \{(x,y)\mid x\in A, y\in B \wedge y\in C\}\\ &= \{(x,y)\mid x\in A \wedge y\in (B\cap C)\}\\ &= A\times(B\cap C).\end{aligned}$$

5. PARAQITJA E BASHKËSIVE SI STRINGJE TË BITËVE

Përkufizimi 1. Le të jetë $\cup = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bashkësi universale dhe $A\subseteq \bigcup$. Bashkësinë A mund ta paraqesim me anë të vargut të bitëve $(0,1)$ të gjatësisë n në të cilin biti i $i-$të është 1 nëse $x_i \in A$ dhe 0 në të kundërtën. Ky string (varg) quhet *karakteristika e vektorit* A.

Shembulli 1. Le të jetë $\bigcup = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ dhe $A=\{x_1, x_2, x_5\}$. Atëherë vargu i bitëve të bashkësisë A (karakteristika e vektorit A) do të jetë 1100100.

Shembulli 2. Le të jetë $\bigcup = \{1,2,3,...,13\}$.

a) Të caktohet vargu i bitëve të bashkësisë $A=\{2,3,5,7,11,13\}$.

b) Të caktohet bashkësia e cila përfaqësohet me vargun e bitëve 1011001.

Zgjidhja.

a) 0110101000101;

b) $\{1,3,4,7\}$.

Ngjashëm, siç patëm veprimet me bashkësi, të njëjtat veprime mund t'i kryejmë në rastin kur bashkësitë paraqiten me anë të vargjeve të bitëve.

Në rastin kur duhet të caktojmë vargun e bitëve për $A \cup B,$ vargjet e bitëve të bashkësive A, B i konsiderojmë si numra binarë dhe i mbledhim “*bit për bit*” , kurse në rastin e $A \cap B$ i shumëzojmë ‘*bit për bit*”.

Le të shohim këtë përmes shembullit vijues.

Shembulli 3. Le të jetë $\bigcup = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, A = \{x_1, x_2, x_4\}, B = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}.$

a) Të caktohet vargu i bitëve për bashkësitë $A, B.$

b) Të caktohet vargu i bitëve për bashkësitë $A \cup B, A \cap B.$

Zgjidhja.

a) Vargjet e bitëve për bashkësitë A, B janë 11010, 10111, përkatësisht.

b) Sipër përshkrimit të mësipërmë kemi:

A	1	1	0	1	0
B	1	0	1	1	1
$A \cap B$	1	0	0	1	0
$A \cup B$	1	1	1	1	1

Komplementi i bashkësisë A caktohet duke ndryshuar bitin 0 në 1 dhe anasjelltas.

P.sh. nëse A-së i shoqërohet vargu i bitëve 00101110 atëherë $\overline{A} = 11010001.$

DETYRA PËR USHTRIME TË PAVARURA

1. Të paraqiten elementet e bashkësive:

$a)$ $A=\{x \mid x \in N, 2 \le x < 7.2\}$.

$b)$ $B=\{x \mid x \in N,\ x-tek, x \le 11\}$.

2. $a)$ Tregoni se $\{\{a,b\},\{a,c\}\} \ne \{a,b,c\}$. $b)$ Pse $\varnothing \ne \{\varnothing\}$?

3. Janë dhënë bashkësitë $A=\{x \mid A \le x \le 7\}, B=\{x \mid x \in (2,5)\}, C=\{1,5,6\}$. Tregoni se $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

4. Le të jenë $A=\{x,1,2,3,4\}, B=\{a,b,2,y\}, C=\{1,b\}$. Tregoni se vlejnë pohimet:

$a)$ $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$,

$b)$ $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

5. Tregoni se nëse $A\subseteq B \wedge B\subseteq C$ atëherë $A\subseteq C$.

6. A ekzistojnë bashkësitë A,B,C të tilla që të vlejnë barazimet?

$$A\cap B \ne \varnothing, A\cap C=\varnothing, (A\cap B)\setminus C=\varnothing.$$

7. Është dhënë bashkësia $S=\{0,1,2,...,12\}$.

$a)$ Të caktohen bashkësitë

$$A=\left\{x \mid x\in S \wedge \frac{x+2}{3}\in S\right\},$$

$$B=\left\{y \mid y\in S \wedge \left(\frac{y}{2}+\frac{y}{5}\right)\in S\right\},$$

$$C=\left\{z \mid z\in S \wedge \left(\frac{z^2}{4}-25\right)\in S\right\}.$$

$b)$ Të caktohen: $A\cup(B\cap C), B\setminus(A\cap C), (A\setminus B)\setminus C, \overline{A}_S\cup(\overline{B}_S\setminus\overline{C}_S)$

8. Është dhënë bashkësia $S=\{0,2,4,6,8,10,12\}$.

$a)$ Të caktohen bashkësitë

$$A=\left\{x \mid x\in S \wedge \left(\frac{2x}{3}-\frac{x}{2}\right)\in S\right\},$$

$$B=\left\{y \mid y\in S \wedge \left(\frac{y^2}{y+4}+1\right)\in N\right\},$$

$$C=\left\{z \mid z\in S \wedge \frac{z^2}{4}>z\right\}.$$

b) Të caktohen:

$$(A\cap B)\cup C, (A\setminus C)\cap(B\setminus C), A\cup(B\cap C), A\setminus(B\setminus(A\cap C))$$

9. Le të jetë R bashkësia e numrave realë. Le të jenë Q, I bashkësitë e numrave racionalë dhe iracionalë përkatësisht.

Të caktohet: $R\cup I, Q\cup I, R\cap Q, \overline{Q}_R, \overline{I}_R, Q\cap I$.

10. Provoni nëse vlejnë pohimet vijuese:

a) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

b) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

c) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

11. Le të jenë A, B bashkësi të fundme. Bashkësitë $A\cap B, A\cup B$ janë të fundme dhe vlen $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

12. Le të jetë L drejtëz e rrafshit. Për çdo $x\in L$, le të jetë C_x rrethi me rreze 1 dhe qendër në pikën x. Çfarë paraqesin bashkësitë $\bigcup_{x\in L} C_x$ dhe $\bigcap_{x\in L} C_x$?

13. Le të jetë $\{A_i : i\in I\}, I\neq\varnothing$ familje e çfarëdoshme e bashkësive. Nëse $P=\bigcap_{i\in I} A_i, S=\bigcup_{i\in I} A_i$, atëherë tregoni se për çdo $k\in I$ vlen $P\subseteq A_k\subseteq S$.

14. Le të jetë $A_k=\left\{x \mid x\in N, \frac{k-1}{k}\le x<k\right\}, k\in N$. Të caktohen bashkësitë $B=\bigcup_{k\in N} A_k, C=\bigcap_{k\in N} A_k$.

15. Është dhënë vargu i bashkësive $(E_n)_{n\in N}$, ku $E_n=\{n, n+1, n+2, ...\}$. Tregoni se $\bigcap_{n\in N} E_n=\varnothing$.

16. Le të jetë $\bigcup=\{0,1,2,...,15\}$

a) Të caktohet vargu i bitëve që i shoqërohet bashkësisë $\{2,5,7,13,14,15\}$.

b) Të caktohet bashkësia të cilës i korrespondon vargu 1011101101.

c) Nëse A, B kanë vargjet e bitëve $0011\,1100\,1110\,1001$, $0101\,0011\,1010\,0011$ të caktohen vargjet e bitëve për bashkësitë $A \cap B, A \cup B, \overline{A}, \overline{B}$.