

ANALIZA MATEMATIKE III

4. FUNKSIONET ME SHUMË NDRYSHORE

1. Të tregohet se R^m është hapësirë metrike me metrikën

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^1 - x_i^2|.$$

2. Le të jetë $C[a, b]$ bashkësia e të gjitha funksioneve të vazhdueshme në $[a, b]$. Distancën në mes të çdo dy funksioneve $x(t)$ e $y(t)$ nga $C[a, b]$ e definojmë si vijon

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Të tregohet se $(C[a, b], d)$ është hapësirë metrike.

3. Të caktohet fusha e përkufizimit të funksioneve:

$$a) z = 2x + \frac{1}{y};$$

$$b) z = y^2 + \arccos \frac{x}{x+y};$$

$$c) z = \frac{1}{\ln(-x-y)};$$

$$d) x = \sqrt{x+y}.$$

4. Të caktohet fusha e përkufizimit të funksioneve:

$$a) f(x, y) = \ln(x+y);$$

$$b) f(x, y) = \arcsin(x+y);$$

$$c) z = \sqrt{xy};$$

$$d) z = \arctg(x+y) + \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}};$$

$$e) u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} + xyz - e^{xyz};$$

$$f) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16} + \sqrt{x+y+z-4};$$

$$g) u = x_1 + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_2 x_3} + \sqrt[3]{x_2 x_3 x_4};$$

$$h) u = \sqrt{\ln \frac{x_1 + x_2 + \sqrt{x_3 x_4}}{\sin^2 x_1}}.$$

5. Të njehsohen limitet:

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2};$$

$$b) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

6. Tregoni se $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$ nuk ekziston.

7. Tregoni se limitet e përsëritur të funksionit

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

në pikën $(0, 0)$ janë të barabartë me zero por $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2)$ nuk ekziston.

8. Tregoni se për funksionin

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\text{vlen } \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

9. Njihsoni $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x}$.

10. Njihsoni $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy - x - y + 1}{\sqrt{xy - x - y + 2} - 1}$.

11. Të caktohen pikat e këputjes për funksionin

a) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

b) $u = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

12. Të shqyrtohet vazhdueshmëria e funksionit

a) $n = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;

b) $u = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$.

13. Tregoni se funksioni $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ është uniformisht i vazhdueshëm në R^2 .

14. Të njihsohet $f'_x(x, 1)$ nëse $f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$.

15. Të njihsohet $\frac{du}{dt}$ nëse

a) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = \sin t$, $y = \cos t$;

b) $u = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$.

16. Të llogaritet derivati dhe diferenciali i funksionit të përbërë

$$w = f(u, v) = u + v, \quad u = u(x) = 3x, \quad v = v(x) = x^3.$$

17. Të llogariten derivatet e pjesshme dhe diferenciali i plotë i funksionit të përbërë

$$w = u^2 \ln v, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = 3x - 2y.$$

18. Të tregohet se funksioni $u = e^y g\left(ye^{\frac{x^2}{y^2}}\right)$ e plotëson barazimin

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial u}{\partial u} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = xyu,$$

nëse g është funksion i diferencueshëm.

19. Tregoni se $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ nëse

a) $u = x^{y^2}$;

b) $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$.

20. Për funksionet vijuese të gjendet derivati dhe diferenciali përkatës

a) $y = \sin(2x + z)$, $d^3 y(0, 2\pi)$, $d^3 y\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$, $d^3 y(1, 1)$;

b) $z = x \int_x^y (x^x + y^y) dx$, $d^2 z(1, 1)$;

c) $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$, $\frac{\partial^7 y}{\partial x^3 \partial y^2}$, $d^4 u(0, 0)$;

d) $u = f(x) \cdot g(y)$, $d^n u$.

21. Të shkruhet formula e Tejlorit për funksionin

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y$$

në rrethinën e pikës $A(1, -2)$.

Të shqyrtohet ekstremumet e funksionit:

22. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

23. $f(x, y) = y^2 e^x - x^2 e^y$.

24. $z = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, $(a > 0, b > 0)$.