IV. RELACIONET DHE PASQYRIMET

1. RELACIONI BINAR

Përkufizimi* 1.** Le të jenë A, B dy bashkësi të çfarëdoshme. Çdo nënbashkësi e bashkësisë $A\times B$ është ***relacion binar i bashkësisë A në bashkësinë B. Simbolikisht relacionin do ta shënojmë me ρ.

***Shembulli* 1.** Le të jenë $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b\}$.

Cilat nga bashkësitë

$X=\{(1,b),(1,a),(2,a)\},\ Y=\{(1,1),(1,2),(1,3)\},\ Z=\{(1,a),\ (3,3)\}$

paraqesin relacion binar të bashkësisë A në bashkësinë B?

Zgjidhja.

Së pari caktojmë $A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$. Prandaj, meqë $X\subset A\times B$ dhe $Y\not\subset A\times B$, $Z\not\subset A\times B$ përfundojmë se bashkësia X paraqet relacion binar të bashkësisë A në bashkësinë B.

Nëse $(a,b)\in\rho$ themi se a ***është në relacion me*** b dhe këtë mund ta shënojmë $a\rho b$.

Nëse $(a,b)\notin\rho$ themi se a ***nuk është në relacion me*** b dhe këtë mund ta shënojmë a *jo* ρb (apo $a\overline{\rho}b$).

Nëse shqyrtojmë bashkësitë e mësipërme $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b\}$ dhe nëse $\rho=\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ është relacion i bashkësisë A në bashkësinë B kemi $1\rho a, 2\rho b, 3\rho a$ por 3 *jo* $\rho\, b, 1$ *jo* ρ.

Relacioni i bashkësisë A në bashkësinë A quhet *relacion në bashkësinë* A.

Përkufizimi* 2. *Relacioni invers i relacionit $\rho\subseteq A\times B$ është

bashkësia $\rho^{-1}\subseteq B\times A$ që jepet me:

$$\rho^{-1}=\{(b,a)\,|\,(a,b)\in\rho.\}$$

Vërejmë se nëse ρ paraqet relacion të bashkësisë A në bashkësinë B atëherë ρ^{-1} paraqet relacion të bashkësisë B në bashkësinë A.

***Shembulli* 2.** Le të jenë dhënë bashkësitë $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3\}$ si dhe relacionet:

a) $\rho_1=\{(2,2),(2,3)\}$; *b*) $\rho_2=A\times B$.

Atëherë $\rho_1^{-1}=\{(2,2),(3,2)\}$; $\rho_2^{-1}=B\times A$.

A ekziston relacioni ρ i cili është i barabartë me relacionin invers ρ^{-1}?

Le të jetë $A=\{a,b,c,d\}, B=\{a,c,d\}$ si dhe relacioni $\rho=\{(a,a),(c,c),(d,d)\}$.

Është e qartë se $\rho=\rho^{-1}$.

***Shembulli* 3.** Le të jenë dhënë bashkësitë $A=\{1,2,3,4\}, B=\{2,3,5\}$. Të caktohen relacionet:

$a)$ $\rho=\{(x,y): y=x+2\}$ $\qquad$ $b)$ $\rho=\{(x,y): x=y-1\}$

$c)$ $\rho=\{(x,y): y=x^2\}$

Zgjidhja.

a) Meqë $\underbrace{3}_{y}=\underbrace{1}_{x}+2$; $\underbrace{5}_{y}=\underbrace{3}_{x}+2$ përfundojmë se $\rho=\{(1,3),(3,5)\}$.

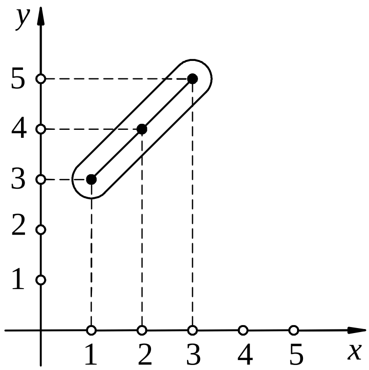
b) $\rho=\{(2,3),(4,5)\}$.

c) Meqë katrori i numrave të bashkësisë A është: $1^2=1, 2^2=4, 3^2=9, 4^2=16$ dhe asnjëri nga numrat $1,4,9,16$ nuk i takon bashkësisë B përfundojmë se $\rho=\varnothing$. Një gjë e tillë ka kuptim në bazë të faktit se $\varnothing\subset A, \forall A$.

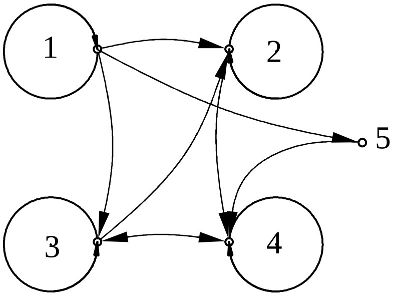
***Shembulli* 4.** Është dhënë bashkësia $A=\{1,2,3,4,5\}$ dhe relacioni $\rho=\{(x,y)\mid y=x+2\}$. Të caktohen elementet e relacionit ρ dhe të paraqitet grafikisht në bashkësinë A^2.

Zgjidhja.

$\rho=\{(1,3),(2,4),(3,5)\}$.



***Shembulli* 5.** Në bashkësinë $A=\{1,2,3,4,5\}$ relacioni ρ është paraqitur në mënyrë grafike. Të caktohen elementet e relacionit ρ.



Zgjidhja.

Së pari vërejmë se $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in \rho$. Por $(5,5) \notin \rho$. Duke përcjellur shigjetat që dalin nga elementi 1 vërejmë se $(1,2),(1,3),(1,5) \in \rho$.

Duke vepruar ngjashëm me elementet 2,3,4,5 merret:

$(2,4) \in \rho, (3,2) \in \rho, (3,4) \in \rho, (4,3) \in \rho, (5,4) \in \rho$.

Përfundojmë se:

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,4)\}.$$

Vërejmë se paraqitja në mënyrë grafike në disa raste të relacioneve mund të jetë shumë e komplikuar dhe nga një paraqitje të tillë nuk mund të vërejmë pothuajse asgjë.

Për këtë arsye e përdorim paraqitjen matricore të relacioneve:

Shembulli 6. Në bashkësinë $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ është dhënë relacioni

$$\rho = \{(x,y) \mid x + y > 3\}.$$

a) Të caktohen elementet e relacionit të dhënë.

b) Të paraqitet në mënyrë grafike dhe matricore relacioni ρ.

Zgjidhja.

a) $\rho = \{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

b) Paraqiten grafikishik relacionin e dhënë.

Në vijim le të paraqesim në mënyrë matricore relacionin e dhënë.

$$A(\rho)=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

Le të sqarojmë se si është plotësuar tabela:

Vërejmë se elementi a_{ij} i matricës merr vlerën 1 nëse elementi $(i, j)\in\rho$. Në të kundërtën elementi a_{ij} i matricës merr vlerën 0.

P.sh. meqë $(1,1)\notin\rho$ atëherë elementi a_{11} merr vlerën 0. Meqë $(1,3)\in\rho$ atëherë elementi a_{13} merr vlerën 1.

2. RELACIONI I EKUIVALENCËS

***Përkufizimi* 1.** Le të jetë ρ relacion binar në bashkësinë X.

1) Relacioni ρ është ***refleksiv*** nëse $x\rho x,\ \forall x\in X$.
2) Relacioni ρ është ***simetrik*** nëse $x\rho y\Rightarrow y\rho x,\ \forall x,y\in X$.
3) Relacioni ρ është ***transitiv*** nëse
   $x\rho y\wedge y\rho z\Rightarrow x\rho z,\ \forall x,y,z\in X$.
4) Relacioni ρ është ***jorefleksiv*** nëse
   x jo$\rho x,\ \forall x,\in X.\ ((x,x)\notin\rho,\forall x,\in X)$
5) Relacioni ρ është ***antisimetrik*** nëse $x\rho y\wedge y\rho x\Rightarrow x=y$.

***Shembulli* 1.** Le të jetë $X=\{1,2,3\}$. Atëherë relacioni $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ është relacion refleksiv, sepse për çdo $x\in X$, $(x,x)\in\rho$. Por relacionet $\rho_1=\{(1,1),(3,3)\}$ dhe $\rho_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\}$ nuk janë relacione refleksive sepse (në të dy rastet) $2\in X$ por $(2,2)\notin\rho_1$, $(2,2)\notin\rho_2$.

***Shembulli* 2.** Le të jetë X si në shembullin 1. Relacioni $\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ është relacion simetrik (pse?) por relacioni $\rho_1=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ nuk është simetrik, sepse sipas përkufizimit të relacionit simetrik meqë $(1,2)\in\rho_1$ do të duhej që $(2,1)\in\rho_1$, gjë që shihet qartë se nuk vlen.

***Shembulli* 3.** Relacioni $"<"$ në bashkësinë e numrave natyrorë është transitiv sepse $x<y\wedge y<z\Rightarrow x<z,\ \forall x,y,z\in N$. Por p.sh. relacioni $\rho_1=\{(x,y)\mid |x-y|\le 1\}$ në bashkësinë Z nuk është relacion transitiv sepse p.sh. për $x=4;\ y=3;\ z=2$, vërtetë $|x-y|\le 1$ dhe $|y-z|\le 1$ por nuk vlen $|x-z|\le 1$ sepse $|4-3|\le 1,\ |3-1|\le 1$ por nuk është e saktë që $|4-2|\le 1$.

Shënimi 1. Duhet të kemi kujdes gjatë shqyrtimit të relacionit refleksiv dhe jorefleksiv. Nëse një relacion nuk është **refleksiv** kjo nuk do të thotë se ai doemos është **jorefleksiv**. P.sh. në shembullin 1 treguam se relacioni $\rho_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\}$ nuk është refleksiv por relacioni ρ_2 nuk është as relacion jorefleksiv. Pse?

Shënimi 2. Po ashtu nëse relacioni nuk është simetrik, nuk do të thotë se ai doemos duhet të jetë *antisimetrik*. P.sh. në bashkësinë $X=\{1,2,3,4\}$ relacioni binar $\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1)\}$ nuk është simetrik sepse $(1,2)\in\rho$ por $(2,1)\notin\rho$. Megjithatë relacioni ρ nuk është as *antisimetrik* sepse $(1,3)\in\rho,\ (3,1)\in\rho$ por nuk vlen $1=3$.

***Shembulli* 4.** Në bashkësinë *N*, përkufizojmë relacionin "|" e pjesëtueshmërisë $a\mid b\Leftrightarrow(\exists n\in N),\ b=an$

Relacioni **|** është *refleksiv*, sepse $(\forall a\in N)\ a\mid a\ (a=1\cdot a)$.

Relacioni **|** *nuk është simetrik*, seps p.sh. 2|4 (4 = 2 · 2) por 4 jo|2 (nuk ekziston numri natyror n ashtu që $2=4n$). Por relacioni | është antisimetrik sepse nëse $a\mid b$ dhe $b\mid a$ atëherë $\exists m,n\in N\mid b=am,\ a=n\cdot b$ prej nga $b=n\cdot b\cdot m$, d.m.th. $m\cdot n=1$, e kjo është e mundur vetëm nëse $m=n=1$. Pra $a=b$.

Relacioni është *transitiv* sepse nëse $a\mid b$ dhe $b\mid c$ atëherë $\exists m,n\in N\mid b=am$ dhe $c=bn$, prandaj $c=amn$, pra, ekziston numri natyror $n_1=mn$ ashtu që $c=an_1$, prandaj $a\mid c$.

Përkufizimi* 2.** Relacioni që është ***refleksiv, ***simetrik*** dhe ***transitiv*** quhet ***relacion ekuivalence***.

***Shembulli* 5.** Në bashkësinë e numrave racional Q është dhënë relacioni ρ si vijon $a\rho b\Leftrightarrow a-b\in Q$.

Të vërtetohet se relacioni ρ është relacion ekuivalence.

Zgjidhja.

Provojmë vetitë 1) – 3) të përkufizimit 1.

1) $a\rho a \Leftrightarrow a-a=0\in Q$ (0 është numër racional)

2) $a\rho b \Rightarrow a-b\in Q \Rightarrow -(b-a)\in Q \Rightarrow b-a\in Q$

3) $a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a-b\in Q \wedge b-c\in Q \Rightarrow (a-b)+(b-c)\in Q \Rightarrow a-c\in Q,$

gjë që duhej treguar.

Le të jetë ρ relacion i ekuivalencës në X dhe le të jetë $x\in X$.

Bashkësia e të gjitha elementeve y nga X, të cilët janë në relacion ρ me elementin x quhet ***klasë e ekuivalencës*** e elementit x dhe shënohet me C_x.

Pra $C_x=\{y\in X \mid x\rho y\}$.

Meqë $\forall x\in X,\ x\rho x$ atëherë $x\in C_x$

D.m.th. çdo element i takon klasës së vet të ekuivalencës, pra asnjë klasë e ekuivalencës nuk është bashkësi boshe.

Tregohet se dy klasë të ekuivalencës ose janë disjunkte ose përputhen.
Për këtë, relacioni i ekuivalencës e zbërthen bashkësinë X në nënbashkësi joboshe disjunkte (klasë të ekuivalencës) unioni i të cilave është X. Pra $X=\bigcup\limits_{x\in X} C_x$ (ose $X=\bigcup\{Cx \mid x\in X\}$.)

Faktor bashkësia është bashkësia e klasëve të ekuivalencës.

***Shembulli* 6.** Në bashkësinë Z, relacioni i kongruencës sipas modulit 2 definohet si vijon:

$$a\equiv b \pmod 2 \Leftrightarrow (\exists k\in Z) \mid a-b=2k.$$

a) Të vërtetohet se relacioni i mësipërm është *relacion i ekuivalencës*.

b) Të caktohen *klasët e ekuivalencës*.

c) Të caktohet *faktor bashkësia*.

Zgjidhja.

a) Provojmë vetitë 1) – 3) të përkufizimit 1.

1) $\forall a\in Z,\ a\equiv a \pmod 2) a-a=0\cdot a=0\cdot 2.$

2) $\forall a,b\in Z,\ a\equiv b \pmod 2 \Rightarrow \exists k\in Z \mid a-b=2k$

$$\Rightarrow b-a=-2k \Rightarrow b-a=2k_1,\ k_1=-k \Rightarrow b\equiv a \pmod 2.$$

3) $\forall a,b,c\in Z,\ a\equiv b \pmod 2 \wedge b\equiv c \pmod 2$

$$\Rightarrow \exists k,k_1\in Z \mid a-b=2k, b-c=2k_1$$

$$\Rightarrow (a-b)+(b-c)=2k+2k_1 \Rightarrow a-c=2(k+k_1)$$

$$\Rightarrow a - c = 2k_2, k_2 = k + k_1 \Rightarrow a \equiv c \pmod 2.$$

b) Kemi dy klasë të ekuivalencës

$$C_0 = \{2k : k \in Z\},\ C_1 = \{2k+1; k \in Z\}$$

sepse

$$C_0 = \{y \in Z \mid y \equiv 0 \pmod 2\}$$
$$= \{y \in Z \mid y - 0 = 2k, k \in Z\}$$
$$= \{y \in Z \mid y = 2k, k \in Z\}$$
$$= \{2k, k \in Z\}$$

$$C_1 = \{y \in Z \mid y \equiv 1 \pmod 2\}$$
$$= \{y \in Z \mid y - 1 = 2k, k \in Z\}$$
$$= \{y \in Z \mid y = 2k+1, k \in Z\}$$
$$= \{2k+1, k \in Z\}$$

Çfarë ndodhë me $C_2, C_3, ...$?

c) Do të shënojmë faktor bashkësinë $Z|_{\equiv (\mathrm{mod}\, 2)}$.

Atëherë $Z|_{\equiv (\mathrm{mod}\, 2)} = \{C_0, C_1\} = \{\{2k : k \in Z\}, (2k+1, k \in Z\}\}$.

3. RELACIONI I RENDITJES

Përkufizimi* 1.** Relacioni që është ***refleksiv, ***antisimetrik*** dhe ***transitiv*** quhet ***relacion i renditjes***.

***Shembulli* 1.** Të vërtetohet se relacioni "$\leq$" i definuar si vijon:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vdots b,\ a, b \in N$$

është relacion i renditjes.

***Zgjidhja*.**

Duhet provuar vetitë 1), 3), 5) të përkufizimit 1 të njësisë paraprake.

1) $a \leq a \Leftrightarrow a \vdots a,$

2) $a \leq b \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow \exists k, k_1 \in N \mid a = k \cdot b \wedge b - k_1 \cdot C$

$$\Rightarrow a = k \cdot k_1 \cdot C \Rightarrow a = k_2 \cdot C,\ k_2 = k \cdot k_1 \Rightarrow a \vdots c \Rightarrow a \leq c.$$

3) $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = kb,\ b = k_1 a, k, k_1 \in N \Rightarrow a = b.$ Pse?

4. PASQYRIMET

Përkufizimi 1. Le të jenë dhënë bashkësitë A, B. f paraqet ***pasqyrim*** të bashkësisë A në bashkësinë B nëse vlen:

1) $(\forall x \in A)(\exists y \in B),\ (x, y) \in f$

2) $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in B\ ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$.

Simbolikisht shënojmë $f : A \to B$.

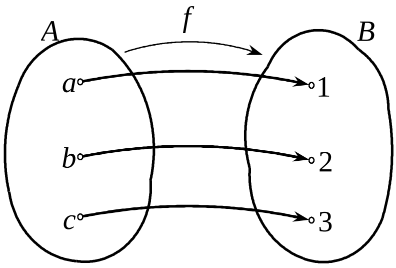
D.m.th. ***pasqyrimi*** $f : A \to B$, të bashkësisë A në bashkësinë B është ***relacioni binar*** në mes të elementeve të bashkësive A, B ashtu që çdo element $x \in A$ paraqitet një dhe vetëm një herë si komponentë e parë e elementeve të bashkësisë *f*.

Pra, pasqyrimi (funksioni) nga A në B paraqet rregullën ose ligjin sipas të cilit çdo elementi nga A i shoqërojmë një element nga B.

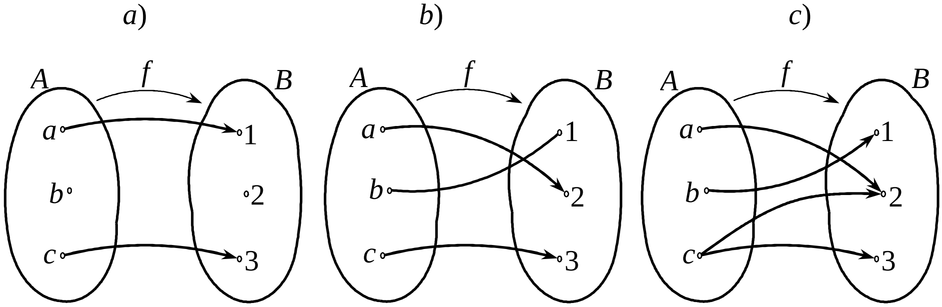
Shembulli 1. Le të jetë $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3\}$.

Bashkësia $f = \{(a,1), (b, 2), (c, 3)\}$ paraqet një funksion prej bashkësisë A në bashkësinë B.

Grafikisht pasqyrimin *f* mund ta paraqesim si vijon:



Shembulli 2. Në cilin nga diagramet vijuese është paraqitur pasqyrim nga bashkësia $A = \{a, b, c\}$ në bashkësinë $B = \{1, 2, 3, 4\}$?



Zgjidhja.

a) Në këtë rast nuk kemi pasqyrim, sepse elementit $b \in A$ nuk i është shoqëruar asnjë element nga *B*.

b) Është pasqyrim.

c) Nuk është pasqyrim, sepse elementit $c \in A$ i shoqërohen dy elemente nga *B*.

Në vend të shënimit $(x, y) \in f$ shënojmë $y = f(x)$ dhe lexojmë: "*x pasqyrohet* në *y* me anë të *funksionit f*".

Komponenta e parë *x* e dyshes së renditur (x, y) quhet ***origjinal*** kurse komponenta e dytë quhet ***përfytyrë e elementit*** *x*.

Bashkësia e të gjitha elementeve të para të funksionit *f* quhet ***domenë*** (*zonë e definimit, zonë e përkufizimit*) të funksionit *f* dhe shënojmë me $D(f)$, kurse bashkësia e të gjitha komponenteve të dyta quhet ***bashkësi e vlerave*** (***kodomenë***) dhe e shënojmë me $K(f)$. (Shpesh në vend të $K(f)$ shënohet $f(A)$).

Po ashtu vërejmë se $K(f) \subseteq B$.

Në rastin e shembullit 3 kemi:

$$f(1) = 3;\ f(2) = 5;\ f(3) = 3;\ f(4) = 3.$$

Domena e funksionit është $D_f = \{1, 2, 3, 4\};\ f(A) = K(f) = \{3, 5\}$.

Në rastin *c*) kemi:

$$f(1) = 3;\ f(2) = 3;\ f(3) = 3;\ f(4) = 3.$$

Në këtë kemi: $D(f) = \{1, 2, 3, 4\};\ K(f) = f(A) = \{3\}$.

Nëse $f : A \to B$ dhe nëse $f(A)$ ka vetëm një element, atëherë pasqyrimi *f* quhet ***konstant***.

Pasqyrimi në rastin *c*) paraqet shembull të pasqyrimit konstant.

Pasqyrimi në shembullin 1) (dhe në përgjithësi pasqyrimet) mund të paraqiten edhe në formën vijuese:

$$f : A \to B;\quad f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Po ashtu, pasqyrimet mund të paraqiten në ***formën tabelare*** dhe ***grafike***.

Shembulli 3. Funksioni "*signum*" përkufizohet në këtë mënyrë:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

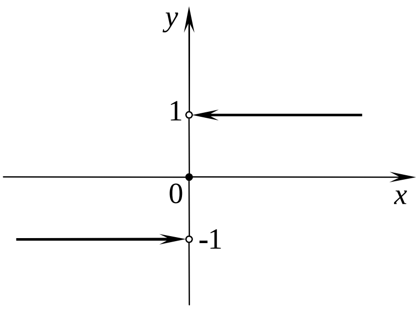
Të paraqiten grafikisht funksionet vijuese dhe të caktohet kodomena e tyre:

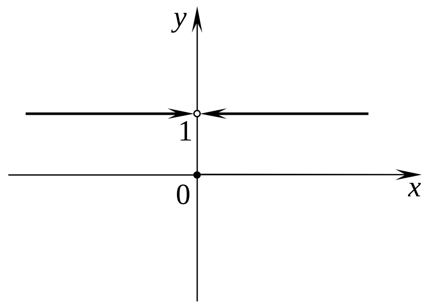
$a)$ $\operatorname{sgn} x$; $\qquad b)$ $\operatorname{sgn} x^2$

$c)$ $\operatorname{sgn} 3^x$; $\qquad d)$ $\operatorname{sgn}(x^2 - x)$.

Zgjidhja.

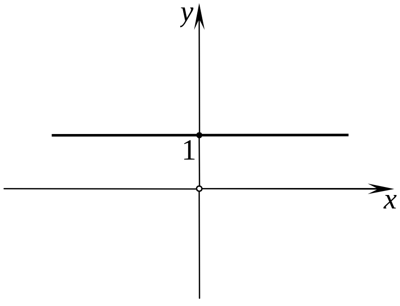
$a)$ $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $\qquad b)$ Meqë $x^2 \geq 0$, kemi $\operatorname{sgn} x^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$





$\operatorname{Kod}(\operatorname{sgn} x) = \{-1, 0, 1\}$; $\qquad \operatorname{Kod}(\operatorname{sgn} x^2) = \{0, 1\}$.

$c)$ Meqë $3^x > 0, \forall x \in R$ atëherë $\operatorname{sgn}(3^x) = 1$. $\operatorname{Kod}(\operatorname{sgn} 3^x) = \{1\}$.



$d)$ I lihet lexuesit.

Përkufizimi 2. Le të jetë $f : A \to B$ pasqyrim prej bashkësisë A në bashkësinë B.

$a)$ Pasqyrimi f është $1-1$ nëse
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ose nëse $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

$b)$ Pasqyrimi f është ***mbi*** nëse $(\forall b \in B)(\exists a \in A) \mid f(a) = b$.

$c)$ Pasqyrimi f quhet ***bijektiv*** nëse është $1-1$ dhe mbi.

Shembulli 4. Cilat nga pasqyrimet vijuese janë 1 – 1, *mbi*, *bijektive*?

$a)$ $f : X \to X$ nëse $X = \{1,2,3,4\}$ dhe f është i definuar si vijon:

$f(1)=2;\ f(2)=3;\ f(3)=2;\ f(4)=4.$

$b)$ $f : N \to Q,\ \ f(n) = \dfrac{n}{2n+1}.$

Zgjidhja.

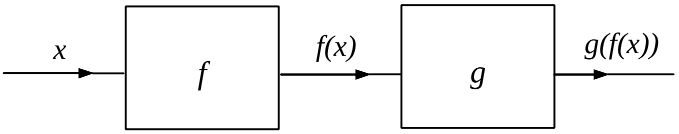
a) Pasqyrimi f nuk është 1-1 sepse $1 \neq 3$ por $f(1) = f(3)$. Pasqyrimi f nuk është mbi sepse për $1 \in X$ nuk ekziston asnjë element $x \in X$ i tillë që $f(x) = 1$.

b) Le të jenë $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dhe

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{n_1}{2n_1+1} = \frac{n_2}{2n_2+1}$$
$$\Rightarrow n_1(2n_2+1) = n_2(2n_1+1)$$
$$\Rightarrow 2n_1n_2 + n_1 = 2n_1n_2 + n_2$$
$$\Rightarrow n_1 = n_2.$$

Pasqyrimi nuk është mbi sepse për shembull për $0 \in \mathbb{Q}$ nuk ekziston $n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0$.

Le të jenë dhënë funksionet f, g. Le të i konsiderojmë ato si dy makina që kanë "*hyrje-daljet*" e tyre. Në qoftë se "*dalja*" (rezultati) i funksionit f shërben si "*hyrje*" e funksionit g atëhere në mënyrë skematike këtë e paraqesim si vijon:



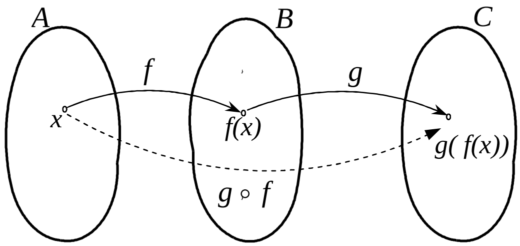
Një gjë që duhet të kemi parasysh është fakti që rezultatet e funksionit f duhet t'i takojnë domenës së funksionit g. Për të siguruar një gjë të tillë, kodomena e funksionit f duhet të jetë e barabartë me domenën e funksionit g. Kështu nëse marrim funksionet $f : A \to B$ dhe $g : B \to C$, atëhere mund të mendojmë kombinimin e këtyre dy makinave si një makinë e cila për "hyrje" x ka elementet nga bashkësia bashkësia A kurse "daljet" $g(f(x))$ janë nga bashkësia C.

Nga një situatë e tillë marrim motivimin për përkufizimin formal të kompozimit të funksioneve.

Përkufizimi 3. Le të jenë dhënë funksionet $f:A\to B$ and $g:B\to C$. Kompozimi i funksioneve f,g është funksioni

$$g\circ f:A\to C,\ (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Kompozimin e pasqyrimeve mund ta paraqesim në këtë mënyrë:



Shembulli 5. Le të jenë $f,g,h:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ të dhëna si vijon

$$f(x)=\frac{x}{2};\ g(x)=x+1; h(x)=x-1.$$

Të njehsohet $f(g(x)); g(h(x)), f(g(h(x)).$

Zgjidhja.

$$f(g(x))=f(x+1)=\frac{x+1}{2};$$

$$g(h(x))=g(x-1)=x-1+1=x;\ f(g(h(x))=f(x)=\frac{x}{2}.$$

Shembulli 6. Nëse $f(x+1)=7x-2$ të njehsohet $f(x)$.

Zgjidhja.

Zëvendësojmë $x+1=t$. Atëherë $x=t-1$. Merret $f(t)=7(t-1)-2=7t-9$. Prandaj $f(x)=7x-9$.

Shembulli 7. Të zgjidhet barazimi $f(x^{-1}+x)=x^2+x^{-2}$.

Zgjidhja.

Zëvendësojmë $x^{-1}+x=t$. Duke ngritur në katror të dy anët e relacionit të fundit merret $x^{-2}+2+x^2=t^2$ prej nga kemi $x^{-2}+x^2=t^2-2$.
D.m.th. $f(t)=t^2-2$. Prandaj $f(x)=x^2-2$.

DETYRA PËR USHTRIME TË PAVARURA

1. Në bashkësinë $N=\{x \mid x\in\mathbb{N}\cup\{0\}, x\le 12\}$ të caktohet relacioni

$$\rho=\{(x,y) \mid x+y=12\}.$$

2. Në bashkësinë $Z_1=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ janë dhënë relacionet vijuese:

$a)$ $\rho=\{(x,y): x<y\}$ $\qquad b)$ $\rho=\{(x,y): x=3y\}$

$c)$ $\rho=\{(x,y): x^2=|y|+1\}$

Të caktohen bashkësitë përkatëse dhe të paraqiten grafikisht si dhe në mënyrë matricore.

3. Le të jetë $X=\{1,2,3,4\}$ dhe le të jenë:

$$\rho_1=\{(1,1),(2,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$
$$\rho_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$$
$$\rho_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Të shqyrtohet se çfarë relacionesh paraqesin ρ_1,ρ_2,ρ_3.

4. Le të jetë R bashkësia e numrave realë. Çfarë relacioni paraqet barazimi i numrave realë "="?

5. Janë dhënë bashkësitë $A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,5\}$.

Cilat nga bashkësitë vijuese paraqesin pasqyrime prej bashkësisë A në bashkësinë B?

$a)$ $f=\{(1,3),(2,5),(3,3),(4,3)\}$ $\qquad b)$ $f=\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$.

$c)$ $f=\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(4,5)\}$

6. Le të jetë $S=\left\{\frac{m}{n}, m,n\in\mathbb{N}, m<n\right\}$.

Le të jenë $f:\mathbb{N}\to S, g:S\to\mathbb{Q}$ të dhënë me:

$$f(n)=\frac{1}{2n+1}, n\in\mathbb{N};\ \ g(s)=\frac{1}{s^2+1}, s\in S.$$

Tregoni se f,g janë 1-1. Të njehsohet $f(g(n)), g(f(n))$. Të provohet nëse $f(g(n)), g(f(n))$ janë 1-1.

7. Të zgjidhet barazimi $f(x+1)=x^2-3x+2$.