DETYRA PËR USHTRIME

(Detyra përgatitore për kollokviumin e dytë)

4. INDUKSIONI MATEMATIK

Të vërtetohen me anë të induksionit matematik:

1. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n-1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

2. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}.$

3. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$

4. $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

5. $1\cdot 3+2\cdot 4+...+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$

6. $1^2-2^2+3^2-...+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}.$

7. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2.$

8. $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i,$ ku $\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+...+a_n.$

9. $\sum_{i=1}^{n}c=n\cdot c,$ ku c është konstante.

10. $\sum_{i=1}^{n}(a_i+c)=\sum_{i=1}^{n}a_i+n\cdot c,$ ku c është konstante.

11. $\sum_{i=1}^{n}c\cdot a_i=c\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i,$ ku c është konstante.

12. $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}b_j.$

13. $\prod_{i=1}^{n}a_ib_i=\prod_{i=1}^{n}a_i\cdot\prod_{i=1}^{n}b_i,$ ku $\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n.$

14. $\prod_{i=1}^{n} c = c^n.$ 15. $\prod_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i.$ 16. $\prod_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$

17. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$

18. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$

19. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$

20. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$

21. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

22. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1).$

23. $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)(2n^2+2n-1).$

24. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

25. $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2.$

26. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$

27. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$

28. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$

29. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$

30. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-2\operatorname{ctg}x.$

31. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^n+1}}.$

32. $\binom{k}{1}+2\binom{k}{2}+3\binom{k}{3}+\ldots+k\binom{k}{k}=k\cdot 2^{k-1}.$

33. Tregoni se $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)$ është katror i plotë.

34. $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k-2)=n(n+2)(n-1),\ \forall n\in\mathbb{N}.$

35. $4\sum_{r=1}^{n}\left(3^{r-1}\sin^3\frac{\theta}{3^r}\right)=3^n\sin\frac{\theta}{3^n}-\sin\theta.$

36. $\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\geq\prod_{i=1}^{n}a_i+\prod_{i=1}^{n}b_i,\ a_i,b_i\geq 0, a_i,b_i\in\mathbb{Z}.$

37. $\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right),\ a_i,b_i\geq 0, a_i,b_i\in\mathbb{Z}.$

38. $2^n>n.$

40. $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n>1,$ ku $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$

41. $(n!)^2<\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n, n>1.$

42. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

43. $n^{n+1}>(n+1)^n, n\geq 3.$

44. $(2n)!<2^{2n}\cdot(n!)^2, n>1.$

45. $n!>n^{\frac{n}{2}}, n>2.$

46. $(2n-1)!<n^{2n-1}, n>1.$

47. $\sum_{i=1}^{n}i^p<\frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}, n, p\in\mathbb{N}.$

48. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\leq 2-\frac{1}{n}.$

49. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+1}>\frac{3}{5}, n>2.$

50. $2!\cdot 4!\cdot 6!\cdot\ \cdot(2n)!>((n+1)!)^n, n>2.$

51. $2^n\geq 1+n.$

52. $2n^3-9n^2+13n+25>0,\ \forall n\geq -1.$

53. $(1+h)^n > 1+nh.$

54. $2^n > n^2 \ \ n \geq 5.$

55. $\sqrt{p^n} + \sqrt{q^n} \leq \sqrt{(p+q)^n}.$

56. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$

57. $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n.$

58. $2^n > n^3 \ (n = 10, 11, 12, \ldots).$

59. $3^n > n^4 \ (n = 8, \ldots).$

60. $2 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^2, \ (n = 5, 6, \ldots).$

61. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 < 2, \ (n = 10, 11, \ldots).$

62. $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n, \ n \geq 6.$

63. $2^n > 1 + n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \ (n > 2).$

64. Vërtetoni se $p!(2q)! \leq 2^{2q} \cdot q!(p+q)!$ ku p, q janë numra të plotë jonegativ.

65. Nëse a, b janë numra real, tregoni se

$$|\sin(a+b)| \leq |\sin a| + |\sin b|$$

dhe se për çdo $k \in \mathbb{N}$ vlen

$$|\sin kx| \leq k |\sin x|.$$

Vërtetoni se:

66. $3^{2n} - 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 8).$

67. $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 17).$

68. $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 54).$

69. $(4^{2n+2} - 15n - 16) \vdots 225.$

70. $(3^{2n+1} + 2^{n+2}) \vdots 7.$

71. $(3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4) \vdots 9.$

72. $(2^{3n+2} - 28n - 4) \vdots 196.$

73. Vërtetoni se $133 \mid 11^{n+1} + 12^{(2n-1)}.$

74. Tregoni se vargu $a_n = 2^{n-1} + 1$ plotëson relacionin $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \forall n \geq 2.$

75. Vargu (a_n) është dhënë si vijon $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \ a_0 = 2, \ a_1 = 3.$

Të caktohet termi i përgjithshëm

76. Vargu (a_n) është dhënë si vijon $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \ a_0 = 0, \ a_1 = 1.$ Të caktohet termi i përgjithshëm

77. Le të jenë a_0, a_1 numra reale pozitiv. Tregoni se vargu $a_{n+1} = |a_n| - a_{n-1}$ është periodik.

78. Të caktohet termi i përgjithshëm i dhënë me

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}),\ n \geq 3.$$

79. E mesmja matematike e numrave *a* dhe *b* është u_1. E mesmja matematike e numrave *b* dhe u_1 është u_2. E mesmja matematike e numrave u_1 dhe u_2 është u_3. Tregoni se

$$U_n = \frac{1}{3}\left\{\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \cdot a + \left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \cdot b\right\}.$$

80. (*Teorema e Bernulit*) Nëse vargu aritmetik dhe vargu gjeometrik i kanë të njëjtë dy anëtarët e parë a_1 dhe a_2 $(a_1 \neq a_2,\ a_1, a_2 > 0)$, atëherë çdo anëtarë i vargut aritmetik është më i vogël se anëtari përkatës i vargut gjeometrik.

81. (*Teorema e Bernulit*) Nëse vargu aritmetik dhe vargu gjeometrik i kanë të njëjtë dy anëtarët e parë a_1 dhe a_2 $(a_1 \neq a_2,\ a_1, a_2 < 0)$, atëherë çdo anëtarë i vargut aritmetik është më i madhë se anëtari përkatës i vargut gjeometrik.

Tregoni se për vargun e Fibonaçit vlejnë:

82. f_{3n} është numër çift, $n \geq 1$.

83. $f_{4n} \vdots 3,\ n \geq 1$.

84. Le të jetë $k \geq 1$ dhe $x \geq 1$. Nëse $k \mid n$ atëherë $f_k \mid f_n$.

85. Për çdo $n \geq 1, m \geq 1,\ f_{m+n} = f_{m+1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n+1} - f_m \cdot f_n$.

86. Për çdo $n \geq 1,\ f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$.

87. Për çdo $n \geq 2,\ f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$.

88. Tregoni se nëse $n \geq 1$, f_n dhe f_{n+1} janë relativisht të thjeshtë.

89. Vërtetoni ose mohoni $(f_n, f_{n+2}) = 1,\ \forall n \geq 1$.

90. Vërtetoni ose mohoni $(f_n, f_{n+3}) = 1,\ \forall n \geq 1$.

91. $1 < \dfrac{f_{n+1}}{f_n} < 2,\ \forall n > 2$.

92. $\dfrac{f_n}{f_{n-1}} - \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{f_{n-1} f_n}$.

93. Le të jetë $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tregoni se

$$A_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

është numër natyror.

94. Le të jetë n numër pozitiv dhe k numër i plotë i tillë që $0 \le k \le n$. Tregoni se $\binom{n}{k}$ është numër i plotë.

95. Të vërtetohet se nga $2n-1$ numra të ndryshëm natyrorë, mund të zgjedhen n numra shuma e të cilëve plotpjesëtohet me n.

96. Tregoni se $2^{3^n}+1$ plotpjesëtohet më 3^{n+1} por nuk plotpjesëtohet me 3^{n+2}.

97. Tregoni se numri $3^{2^n}-1$ plotpjesëtohet me 2^{n+2} por jo me $2^{n+3}\,(n \ge 1)$.

98. Tregoni se shifra e fundit e numrit 2^{2^n} është 6.

99. Le të jetë *m* numër i plotë dhe $x \equiv y \pmod{m}$. Tregoni se nëse $n \ge 1$ atëherë $x^n \equiv y^n \pmod{m}$.

100. Tregoni se për çdo numër të plotë $n \ge 1$, $2^{2^n}-1$ plotpjesëtohet më së paku se n të ndryshëm të thjeshtë.

101. Dijmë se $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Lehtë tregohet se $\binom{2n}{n} < 4^n$.

Tregoni se $\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$.

102. Vërtetoni se numri plotpjesëtohet me $2^k, k \in \mathbb{N}$ atëherë dhe vetëm atëherë nëse numri që formohet nga *k* shifrat e tij të fundit plotpjesëtohet me 2^k.

103.(*Teorema e Fermës*) Nëse *p* është numër i thjeshtë dhe *a* numër natyror, tregoni se $a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$.

104. Vërtetoni se $\prod_{k=1}^{r}(6n_k+5) \equiv \begin{cases} 5(\text{mod}\,6), & r-\text{çift} \\ 1(\text{mod}6), & r-\text{çift} \end{cases}$, n_k janë numra natyrorë.