DETYRA PËR USHTRIME

(Detyra përgatitore për kollokviumin e parë)

1. SISTEMET NUMERIKE

1. Të gjendet baza *x* e sistemit nëse $(1021)_x + (201)_x + (201)_3 = x^3 + 81$.

2. Të caktohet *x* nga barazimi $(1001)_x + (401)_x = (x)_3 + 24$ nëse dihet se *x* është numër njëshifror. Çfarë do të merret nëse *x* është numër dyshifror, treshifror,...?

3. Të vërtetohet se çdo numër i plotë pozitiv mund të shprehet në mënyrë të vetme si shumë e fuqive të ndryshme të numrit 2.

4. Të caktohen të gjithë numrat natyror *n*, ashtu që në sistemin me bazë *n* të vlejë $11 \cdot 11 = 121$.

5. Le të jetë $n! = n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, p.sh. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Tregoni se për asnjë $m \in \mathbb{N}$ dhe asnjë $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ barazimi $2^m = n!$ nuk ka zgjidhje.

6. Të vërtetohet se çdo numër natyror (në sistemin dhjetor) që përmban vetëm shifrat 2 dhe 6 mund të shkruhet në trajtën 4k+2, për ndonjë *k* numër të plotë jonegativ. Pastaj, të tregohet se numri që ka vetëm shifrat 2 dhe 6 nuk mund të shprehet si ndryshim i katrorëve të dy numrave natyror.

7. Le të jetë $x \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Cila është shifra e fundit e numrit $x^2 + x + 1$ në bazën 2?

8. Le të jetë $x \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Cila është shifra e fundit e numrit $x^2 + x$ në bazën 5?

9. Le të jetë $x \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Cila është shifra e fundit e numrit $x^2 + x + 1$ në bazën 5?

10. Të caktohet baza *b* ashtu që $72_b = 2(27_b)$.

11. Të caktohet baza *b* ashtu që:

a) $73_b = 2(37_b)$; *b*) $72_b = 3(27_b)$.

12. Në cilën bazë *b*, numri 441_b është katror i një numri të plotë?

13. Numri N në bazën 4 është ekuivalent me numrin 441 në bazën 10. Të caktohet rrënja katrore e numrit N në bazën 4.

14. Le të jetë N numër katërshifror $a_0a_1a_2a_3$ (në bazën 10) dhe le të jetë N' numër katërshifror njëri nga 24 permutimet e mundshme të shifrave (p.sh. $a_1a_2a_0a_3, ..., a_3a_0a_1a_2$). Le të jetë $D = |N - N'|$. Të caktohet shifra më e madhe që e pjesëton numrin D.

15. Të caktohet numri më i vogël *b* ashtu që 374 në bazën *b* të jetë katror i një numri të plotë.

16. Të shkruhet numri dhjetor 0.3 në bazën 7.

2. RELACIONET

1. Le të jetë $X = \{1,2,3,4\}$ dhe

$$f_1 = \{(1,1),(2,2),(1,3),(3,1),(3,2),(2,3)\}$$

$$f_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$$

$$f_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$$

Cili prej tyre paraqet relacion ekuivalence në bashkësinë X ?

2. Është dhënë $X = \{1,2,3,4,5\}$ dhe nënbashkësitë:

a) $M_1 = \{1\}, M_2 = \{2,3,4\}, M_3 = \{4,5\}$

$b)$ $M_1 = \{1,2\}, M_2 = \{3,4\}$

$c)$ $M_1 = \{1\}, M_2 = \{2,3\}, M_3 = \{4,5\}$.

A mundet që nënbashkësitë e dhëna të jenë klasë të ekuivalencës të ndonjë relacioni të ekuivalencës? Nëse po të shkruhet relacioni i ekuivalencës.

3. Në bashkësinë $\mathbb{N}$ japim relacionin e pjestueshmërisë si vijon:

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) \mid b = an.$$

A është relacioni i mësipërm ekuivalencë apo renditje e pjesshme?

4. Le të jetë $M = Z \times N$. Në bashkësinë M definojmë relacionin ρ si vijon:

$$(a,b)\rho(c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Tregoni se ρ është relacion ekuivalence.

5. Në bashkësinë $\mathbb{Z}$ japim relacionin e kongruencës sipas modulit m $(m \in Z \setminus \{0\})$ si vijon:

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, a - b = mk\}.$$

Tregoni se $\equiv (\mathrm{mod}\, m)$ është ekuivalencë. Të caktohen klasët e ekuivalencës dhe faktor bashkësia.

6. Cilën veti e ka relacionin R në bashkësinë $\mathbb{N}$ i dhënë si vijon:

$a)$ $mRn \Leftrightarrow m^2 = n^2$; $b)$ $mRn \Leftrightarrow (m,n) = 1$;

$c)$ $mRn \Leftrightarrow m < n$; $d)$ $mRn \Leftrightarrow |m - n| = 4$.

7. Nëse R_1, R_2, R_3 janë relacione binare të përkufizuara në X, kurse δ_x relacion identik i bashkësisë X , të vërtetohet se:

$a)$ $R \cdot \delta_x = \delta_x \cdot R = R$; $b)$ $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$;

$c)$ $(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$.

8. Le të jetë X bashkësi e dhënë dhe $S \subseteq P(X), S \neq \varnothing$ i tillë që:

(i) Nga $Z \in S \Rightarrow Y \in S$ për $Y \subseteq Z$

(ii) $Y, Z \in S \Rightarrow Y \cup Z \in S$.

Nëse S është e fiksuar në $P(X)$ dhe nëse relacionin R e japim si vijon

$$ARB \Leftrightarrow A \Delta B \in S$$

tregoni se R është relacion ekuivalence në $P(X)$.

9. Në $S = \{1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ relacioni binar R është përkufizuar si vijon:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2, \forall x, y \in S.$$

Tregoni se R është relacion ekuivalence në S dhe caktoni faktor bashkësinë $S_{|R}$.

10. Në Z është përkufizuar relacioni R si vijon

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow x - y = 5k, k \in \mathbb{Z}.$$

Tregoni se R është relacion ekuivalence në $\mathbb{Z}$ dhe formoni faktor bashkësin $Z_{|R}$.

11. Le të jetë E një bashkësi dhe $A \subset E$. Në E përcaktohet relacioni ρ si vijon:

$$x \equiv y(\rho) \Leftrightarrow x = y \text{ ose } x, y \in A.$$

Tregoni se ρ është relacion ekuivalence dhe caktoni klasët e ekuivalencës.

12. Le të jetë $B \subset A.$ Në $P(A)$ është dhënë relacioni f si vijon:

$$XfY \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B, \ X, Y \subseteq A.$$

Tregoni se f është relacion ekuivalence në $P(A)$ dhe të caktohen klasët e ekuivalencës.

3. PASQYRIMET

1. Le të jetë $A \subset X$ dhe le të jenë $f : X \to Y, f_A : A \to Y$ pasqyrime. Të vërtetohet se:

a) f është 1-1 $\Rightarrow f_A$ është 1-1; *b*) f_A është mbi $\Rightarrow f$ është 1-1

2. Le të jenë $f : X \to S, g : S \to Y$ pasqyrime.

a) fg është 1-1 atëherë f është 1-1; *b*) fg është mbi atëherë g është mbi.

Shënim: Me fg kuptojmë $(x)fg = ((x)f)g, x \in X.$

3. Le të jetë $X \neq \emptyset.$ Për pasqyrimin 1_X themi se është pasqyrim identik, nëse

$$(\forall x \in X)(1_X(x) = x).$$

Le të jenë $f : X \to S, g : S \to X$ pasqyrime për të cilat $(x)fg = 1_X.$ Tregoni se f është $1-1,$ kurse g është mbi.

Të caktohet pasqyrimi invers

4. $f(x) = 3^x - 1.$ **5.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}.$ **6.** $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}, (a > 1).$

7. $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}.$ **8.** $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}.$

9. $f(x) = \dfrac{2}{1 - 2\cos x}.$ **10.** $f(x) = 2\sin 3x.$ **11.** $f(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos x)$

12. $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2 x.$

13. Janë dhënë $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x^2.$ Të caktohet $f(g(x)), g(f(x)).$

14. Janë dhënë $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = x(1 - x^2).$ Të caktohet $f(g(x)).$

15. Janë dhënë $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x - [x].$ Të caktohet $g(f(x)).$

16. Të caktohet funksioni $f(x)$ nëse $f(x^{-1}) = x + \sqrt{1+x^2}.$

17. Të caktohet funksioni $f(x)$ nëse $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2.$

18. Nëse $f(x-1) = 2x - 3$ atëherë të caktohet $f(f(x^2 - x + 1).$

19. Është dhënë funksioni $\ln(x^2 - 1) + 3\ln(y + 2) = 3$

Të paraqitet funksioni i dhënë në trajtën $y = f(x).$ Të caktohet pastaj funksioni $f^{-1}(x).$