5. KOMBINATORIKA

1. Njehsoni x – in nga shprehja $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a^{x+1}\sqrt{a^{x-1}}\right)^8$ ashtu që anëtari i katërtë në zhvillimin binomial të jetë $56a^{5.5}$.
2. Në zhvillimin binomial $\left(x\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ koeficientët e pestë dhe të dhjetë janë të barabartë. Të caktohet anëtari i cili nuk përmban x.
3. Shuma e koeficientëve të dytë dhe të tretë të zhvillimit binomial $\left(x^{-\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^n$ është 136. Caktoni anëtarin i cili përmban $x^{8.5}$.
4. Në zhvillimin binomial $(x+y)^n$ anëtari i dytë është 240, anëtari i tretë është 720, kurse i katërti 1080. Të caktohen x, y, n.
5. Anëtari i katërtë i zhvillimit binomial të binomit $\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ është 200. Të caktohet x.
6. Anëtari i tretë i zhvillimit binomial të binomit $(x+x^{\log x})^5$ është 10^6. Të njehsohet x.
7. Anëtari i gjashtë në zhvillimin binomial të binomit $\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\log x}\right)^8$ është 5600. Të njehsohet x.
8. Koeficienti i pestë, gjashtë dhe shtatë i binomit $(1+x)^n$ formojnë varg aritmetik. Të caktohet *n*.
9. Koeficientët e anëtarit të pestë dhe të tretë të zhvillimit binomial të binomit $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ janë në raport si 7:2. Të caktohet anëtari që përmban x.

10. Koeficientët e anëtarit të katërtë dhe të gjashtë të zhvillimit të binomit $\left(\frac{1}{z}+\sqrt{z}\right)^n$ janë në raport si 5:18. Të caktohet anëtari i cili nuk varet nga *z*.

Njehsoni

11. $3C_1 + 7C_2 + 11C_3 + \ldots + (4n-1)C_n$

12. $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + 7C_3 + \ldots + (4n+1)C_n$

13. $C_0 - 2C_1 + 3C_2 - 4C_3 + \ldots + (-1)^n(n+1)C_n$

Vërtetoni identitetet:

14. $\binom{-1}{k} = (-1)^k.$

15. $\binom{-2}{k} = (-1)^k(1+k).$

16. $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{k+n-1}{k}.$

17. $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = (-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}.$

18. $n\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n+1}.$

19. Nëse $V_n^r = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$ tregoni se

$$V_{n+2}^r + V_n^r + 2rV_n^{r-1} + r(r-1)V_n^{r-2}.$$

20. Nëse $(a)_r = a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+r-1)$ tregoni se:

a) $(a)_{n-1}(a-1) = (a-1)_n;$

b) $(a)_{n-r}(1-a-n) = (-1)^r(a)_n;$

c) $\dfrac{n!}{(n-s)!} = (-1)^s(-n)_s.$

21. Vërtetoni se $\binom{n-p}{q}\cdot\binom{n}{p} = \binom{n-q}{p}\cdot\binom{n}{q}.$

22. Nëse $n\in\mathbb{N}$ atëherë tregoni se $\dfrac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$ është numër natyror.

23. Tregoni se $\dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$, $n \in \mathbb{N}$ është numër natyror.

24. Të vërtetohet se

$$1!\cdot 1 + 2!\cdot 2 + 3!\cdot 3 + \ldots + n!\cdot n = (n+1)! - 1, \text{ ku } n \in \mathbb{N}.$$

Të zgjidhen në bashkësinë e numrave natyrorë barazimet dhe mosbarazimet:

25. $\binom{n}{5} < \binom{n}{3}$. **26.** $\binom{2n}{7} > \binom{2n}{5}$. **27.** $\binom{19}{k-1} > \binom{19}{k}$.

28. $2\binom{n}{5} > 11\binom{n-2}{3}$. **29.** $\binom{n}{n-2} + \binom{n+1}{n-1} \le 100$.

30. Të caktohen n, k nëse

a) $\binom{n+1}{k} : \binom{n}{k+1} : \binom{n}{k-1} = 6:5:2;$

b) $\binom{n}{k-1} : \left(\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} \right) : \binom{n}{k+1} = 3:5:5.$

Vërtetoni:

31. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} < 2^n$.

32. $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n} = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \ldots + \binom{2n}{2n-1}$.

33. Tregoni se $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ është numër i plotë.

34. Tregoni se për çdo $n \in \mathbb{N}$ numri $[(2+\sqrt{3})^n]$ është tek ([ ] – pjesa e plotë).

35. Tregoni se $\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{n-k} \sum_{v=0}^{k+\alpha} \binom{k+\alpha}{v} = 2^{n+1} - 2^k$.

36. Le të jetë $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ vargu i numrave realë dhe le të jetë

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Vërtetoni se $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vlen $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$.

37. Le të jetë $n \in \mathbb{N}$. Tregoni se

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Vërtetoni se:

38. $1 + 14\binom{n}{1} + 36\binom{n}{2} + 24\binom{n}{3} = (n+1)^4 - n^4$.

39. $\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{k} = \sum_{k=1}^{nx} \binom{n+k-1}{k}$.

40. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{2n-1}{k}^{-1} = \frac{2}{n+1}$.

41. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n+m}{k}^{-1} = \frac{n+m+1}{(m+1)(m+2)}$.

42. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2$.

43. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{m} \cdot \binom{2n}{m+k}^{-1} = \frac{2n+1}{n+1}$.

44. $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n+1}{1} + \frac{2}{2^2}\binom{n+2}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} = 2^n$.

45. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+1} = 2^{4n-2}$.

46. Është dhënë bashkësia $E = \{0,1,2,3,4,5\}$. Sa ka numra të ndryshëm natyrorë më të mëdhenjë se 1000 në vetinë që ata të formohen nga elementet e bashkësisë *E*, ashtu që shifrat të jenë të ndryshme?

47. Të caktohet numri i numarve të ndryshëm natyror më të vegjël se 100000 të cilët mund të formohen me shifrat 0, 1, 2, 3, 4, 5.

48. Vërtetoni se nga 39 numra të njëpasnjëshëm natyrorë gjendet së paku një numër shuma e shifrave të të cilët plotpjesëtohet me 11.

49. Komisioni ka mbajtur 40 takime. Në çdo takim kanë marrë pjesë 10 anëtarë, me ç'rast çdo dy anëtarë të komisionit nuk kanë qenë së bashku në më tepër se në një mbjedhje. Tregoni se komisioni ka më tepër se 60 anëtarë.

50. Në rrafsh është dhënë rrethi me rreze 100 dhe 32 drejtëza. Të vërtetohet se ekziston rrethi me rreze 3, i cili gjendet i tëri në brendi të rrethit të dhënë dhe i cili nuk ka pika të përbashkëta me asnjërën nga drejtëzat e dhëna.