

6. TEORIA E NUMRAVE

1. Tregoni se numri plotpjesëtohet me 2 atëherë dhe vetëm atëherë nëse shifra e tij e fundit plotpjesëtohet me 2.
2. Tregoni se numri plotpjesëtohet me 5 atëherë dhe vetëm atëherë nëse shifra e tij e fundit është 0 ose 5.
3. Tregoni se numri plotpjesëtohet me 9 atëherë dhe vetëm atëherë kur shuma e shifrave të tij plotpjesëtohet me 9.
4. Le të jetë $n = d_0 + 10d_1 + 10^2d_2 + \dots + 10^k d_k$.
Atëherë $n \equiv d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \dots + (-1)^k d_k \pmod{11}$.
5. Cili është numri më i vogël k ashtu që $2^k \equiv 1 \pmod{53}$?
6. Tregoni se numri $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ është katror i një numri.
7. Për çfarë vlera x , $x \in \mathbb{Q}$ funksioni $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ është numër i plotë?
8. Nëse x është numër çift atëherë $x^2 + 2x + 4$ plotpjesëtohet me 4.
9. Nëse $7 \mid 3x + 2$ atëherë tregoni se $7 \mid (15x^2 - 11x + 14)$.
10. Të caktohen të gjithë numrat natyror n ashtu që $(n+1) \mid (n^2 + 1)$.
11. Tregoni se nëse $3 \mid (a^2 + b^2)$ atëherë $3 \mid a$ dhe $3 \mid b$.
12. Tregoni se $n^4 + 4$ është i thjeshtë vetëm për $n = 1, n \in \mathbb{N}$.
13. Të caktohen të gjithë numrat e plotë pozitiv $n \geq 1$ ashtu që $n^4 + 4^n$ të jetë i thjeshtë.
14. Tregoni se gjatë pjesëtimit të numrit të thjeshtë me numrin 30 merret mbetja numër i thjeshtë.
15. Le të jenë a, b, c, d, e numra të plotë. Nëse $ae + b$ dhe $ce + d$ plotpjesëtohen me k ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) atëherë tregoni se $ad - bc$ plotpjesëtohet me k .
16. Të caktohen të gjithë numrat e thjeshtë p ashtu që $p^2 + 14$ të jetë numër i thjeshtë.
17. Të caktohen dy shifrat e fundit të numrit 29^{29} .
18. Cila është shifra e fundit e numrit 7^{1000} ?

19. Tregoni se $1^{1993} + 2^{1993} + 3^{1993} + \dots + 1000^{1993}$ plotpjesëtohet me 1001.
20. Të caktohet mbetja që merret kur numri 6^{1987} plotpjesëtohet me 37.
21. Të caktohet shifra e fundit e numrit 7^{7^7} .
22. Të caktohet shifra e fundit e numrit 3^{100} .
23. Të caktohen dy shifrat e fundit e numrit 3^{100} .
24. Provoni nëse numri $2222^{5555} + 5555^{2222}$ plotpjesëtohet me 77.
25. A ekziston numri natyror n ashtu që $7^n - 1$ të plotpjesëtohet me 8 dhe 3?
26. Të caktohen dy shifrat e fundit të numrit 7^{999} .
27. Nëse $2^k - 1$ është numër i thjeshtë atëherë edhe k është numër i thjeshtë. Tregoni. Po anasjelltas a vlen?
28. Tregoni se nëse $n > 3$ atëherë $n, n+2, n+4$ nuk mund të jenë që të tre njëkohësisht numra të thjeshtë.
29. Nëse $n > 3$ atëherë $n, 2n+2, 4n+1$ nuk mund të jenë numra të thjeshtë njëkohësisht.
30. Nëse p është numër i thjeshtë, atëherë $p \mid (2^p - 2)$.
31. Le të jetë n numër natyror më i madh se 1. Sqaroni pse asnjëri nga numrat
- $$n!+2, n!+3, n!+4, \dots, n!+n$$
- nuk është i thjeshtë.
32. Tregoni se $\frac{(2m!)(3n!)}{(n!)^2(n!)^3}$ është numër natyror.
33. Le të jetë s numër i plotë pozitiv. Tregoni se çdo interval $[s, 2s]$ përmban një fuqi të numrit 2.
34. Tregoni se $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ plotpjesëtohet me 1897 për çdo numër natyror n .
35. Nëse nga bashkësia $E_{2n} = \{1, 2, \dots, 2n\}$ e $2n$ numrave natyrorë zgjedhen $n+1$ numra, tregoni se ekzistojnë së paku 2 numra ashtu që njëri të plotpjesëtohet me tjetrin.
36. Nëse p është numër i thjeshtë atëherë $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$.

37. Numrat e trajtës $F_n = 2^{2^n} + 1$ quhen numrat e Fermës. Tregoni se vlen

$$F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_{n-1} = F_n - 2, n > 0.$$

38. Vërtetoni se ka pambarimisht numra të thjeshtë të trajtës $4n + 3$.

39. Tregoni se çdo vit, përfshirë edhe vitin e brishtë, ka të paktën një të Premte të datës 13.

40. Vargu

$$3, 15, 24, 48, \dots$$

përbëhet prej atyre numrave pozitiv që janë shumëfishë të numrit 3 dhe janë për një më të vegjël se katrorët e tyre. Cila është mbetja që merret kur numri i 1994-të i vargut pjesëtohet me 1000?

41. Numrat dyshifror prej 19 deri në 92 janë shkruar njëri pas tjetrit dhe formojnë numrin

$$1920212223\dots89909192.$$

Cila është fuqia më e madhe e numrit 3 që e plotpjesëton këtë numër?

42. Numri 4444^{4444} është shkruar në formën dhjetore. Shuma e shifrave të tij është A . Le të jetë B shuma e shifrave të numrit A . Të caktohet shuma e shifrave të numrit B .

43. Cila është shifra e fundit e numrit $\left[\frac{10^{20000}}{10^{100} + 3} \right]$, ($[]$ – pjesa e plotë)?